§ 转置与伴随变换

定理：1) 设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换，则 V 上存在唯一的线性变换 $\mathscr{A}^*$，满足

$$(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*\beta)\qquad \forall\,\alpha,\beta\in V$$

2) 若 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1\cdots e_n$ 下矩阵为 A，则 $\mathscr{A}^*$ 在 $e_1\cdots e_n$ 下矩阵为 A^T

称 $\mathscr{A}^*$ 为 $\mathscr{A}$ 的<u>伴随变换</u>

证：唯一性：若 $\mathscr{A}^*$ 与 $\mathscr{B}$ 均满足这一条件，即

$$(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*\beta)=(\alpha,\mathscr{B}\beta)\qquad\forall\,\alpha,\beta$$

$$\Rightarrow\ (\alpha,(\mathscr{A}^*-\mathscr{B})\beta)=0\quad\forall\,\alpha,\beta$$

$$\Rightarrow\ (\mathscr{A}^*-\mathscr{B})\beta=0\ \forall\beta\ \Rightarrow\ \mathscr{A}^*-\mathscr{B}=0\ \Rightarrow\ \mathscr{A}^*=\mathscr{B}$$

存在性：设 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $(e_1\cdots e_n)$ 下矩阵为 A，则 A^T 对应的线性变换满足这一性质，即

若 $\mathscr{A}^*(e_1\cdots e_n)=(e_1\cdots e_n)A^T$，则 $(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*\beta)$.

设 $\alpha=(e_1\cdots e_n)x$，$\beta=(e_1\cdots e_n)y$，则

$$(\mathscr{A}\alpha,\beta)=((e_1\cdots e_n)Ax,(e_1\cdots e_n)y)=(Ax)^T\cdot y$$

$$\parallel$$

$$(\alpha,\mathscr{A}^*\beta)=((e_1\cdots e_n)x,(e_1\cdots e_n)(A^Ty))=x^T(A^Ty)\qquad\square$$

性质：1) $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$

2) $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$

3) $(\lambda\mathscr{A})^* = \lambda \mathscr{A}^*$

4) $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$

证 4)：$(\mathscr{A}\mathscr{B}\alpha, \beta) = (\mathscr{B}\alpha, \mathscr{A}^*\beta) = (\alpha, \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\beta)$

$\Rightarrow (\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

$(\mathscr{A}\mathscr{B})^* \Leftrightarrow (AB)^T = B^T A^T \leftrightarrow \mathscr{B}^* \cdot \mathscr{A}^*$ □

性质：$\mathscr{A}$ 正交 $\Leftrightarrow \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathcal{E}$ （单位变换）（$\Leftrightarrow \mathscr{A}^*$ 正交）

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow (\alpha, \mathscr{A}^*\mathscr{A}\beta) = (\alpha, \beta)$

§ 对称变换与对称矩阵

定义：$\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 若 $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$，则称 $\mathscr{A}$ 为 V 上的对称变换（或自伴随变换）.

注：$\mathscr{A}$ 对称 $\Leftrightarrow (a, \mathscr{A}b) = (\mathscr{A}a, b) \quad \forall a, b \in V$

定理. 设 A 为某欧氏空间上的一线性变换 $\mathscr{A}$ 在某标准正交基下的矩阵. 则

$\mathscr{A}$ 为对称变换 $\Longleftrightarrow$ A 为实对称矩阵

② 证：$\mathscr{A}$ 对称 $\Leftrightarrow \mathscr{A}^* = \mathscr{A} \Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow A$ 对称. □

定理：对称变换的不同特征值对应的特征向量正交.

证：设 $\mathscr{A}\xi_1=\lambda\xi_1\ (\xi_1\neq 0)$，$\mathscr{A}\xi_2=\lambda_2\xi_2\ (\xi_2\neq 0)$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$

$\mathscr{A}$ 对称 $\Rightarrow (\mathscr{A}\xi_1,\xi_2)=(\xi_1,\mathscr{A}\xi_2)$

$\Rightarrow (\lambda_1\xi_1,\xi_2)=(\xi_1,\lambda_2\xi_2)$

$\Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)(\xi_1,\xi_2)=0$

$\Rightarrow (\xi_1,\xi_2)=0 \Rightarrow \xi_1\perp\xi_2$. □

推论：实对称阵 A 的属于不同特征值的特征向量必正交.

§ 实对称矩阵的对角化.

这一节证明实对称阵总是可对角化的！

性质：实对称矩阵的特征值都为实数.

证：设 $A\xi=\lambda\xi\ (\xi\neq 0)$

A为实矩阵 $\Rightarrow A\bar{\xi}=\bar{A}\bar{\xi}=\overline{(A\xi)}=\overline{\lambda\xi}=\bar{\lambda}\cdot\bar{\xi}$

$\left.\begin{array}{l}A\text{ 为对称矩阵}\\ (\bar{\xi}^TA)\xi=\bar{\xi}^T(A\xi)\end{array}\right\}\Rightarrow (A\bar{\xi})^T\xi=\bar{\xi}^T(A\xi)$

$\Rightarrow \bar{\lambda}\,\bar{\xi}^T\xi=\lambda\,\bar{\xi}^T\xi \quad (\bar{\xi}^T\xi=|\xi|^2\neq 0)$

$\Rightarrow \bar{\lambda}=\lambda \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}$. □

定理：任取n阶实对称矩阵 A，存在n阶正交矩阵 T，使得

$T^{-1}AT$ 为对角矩阵

证明：对 n 归纳. $n=1$ ✓ 假设 $n-1$ 时成立.

设 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$ $(\lambda_1\in\mathbb{R}\ \&\ \xi_1\in\mathbb{R}^n$ 且 $|\xi_1|=1)$

将 ξ_1 扩充为一组基，并进行 Schmidt 正交化得 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$. 记

$$T_n=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

则 T_n 为正交矩阵.

$$T_n^{-1}AT_n=T_n^TAT_n=\begin{pmatrix}\xi_1^T\\\xi_2^T\\\vdots\\\xi_n^T\end{pmatrix}(\lambda_1\xi_1,A\xi_2,\cdots A\xi_n)$$

$\begin{cases}Ax_1=\lambda_1x_1\\ x_1\text{ 与 }x_i\ (2\leqslant i\leqslant n)\text{ 正交}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_i^T(\lambda_1\xi_1)=\begin{cases}\lambda_1 & i=1\\0 & i>1\end{cases}\\ \xi_1^T\cdot(A\xi_i)=(A\xi_1)^T\xi_i=\lambda_1\xi_1^T\xi_i=0\ (\forall i\geqslant2)\end{cases}$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&A_{n-1}\end{pmatrix}$$

A_{n-1} ↳ $n-1$ 阶实对称阵.

归纳假设 $\Rightarrow\exists$ $n-1$ 阶正交阵 T_{n-1} s.t.

$$T_{n-1}^{-1}A_{n-1}T_{n-1}=\begin{pmatrix}\lambda_2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

记 $T=T_n\begin{pmatrix}1&\\&T_{n-1}\end{pmatrix}$，则 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$，

T ↳ 仍然正交.

例： $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 求正交阵 T s.t. $T^{-1}AT$ 对角.

解： $P_A(\lambda) = (\lambda-5)(\lambda+1)^2$

$(5I-A)X=0 \Rightarrow X = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

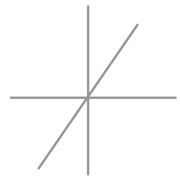
$(-I-A)X=0 \Rightarrow X = c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

§7.4* 欧氏空间的子空间.

子空间的正交补存在且唯一.



定义: 设 V_1, V_2 为两欧氏空间 V 的两子空间. 若 $\forall\ a_1 \in V_1$, $a_2 \in V_2$

$$(a_1, a_2) = 0$$

则称 V_1, V_2 **相互正交**, 记为 $V_1 \perp V_2$. 若一个向量 a 满足 $\langle a \rangle \perp V_1$, 则称 a 与 V_1 **正交**, 记为 $a \perp V_1$.

定理: 1) $V_1 \perp V_2 \Rightarrow V_1 + V_2$ 为直和 ($\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = 0$)

2) $V_1, V_2, \cdots, V_r$ 两两正交 $\Rightarrow V_1 + V_2 + \cdots + V_r$ 为直和)

定义: 若 $V_1 \perp V_2$ 且 $V = V_1 + V_2$, 则称 V_1, V_2 互为**正交补(空间)**.

定理: 欧氏空间的任意子空间的正交补存在且唯一.